M1
K' (m-K) !

C

Université Abdelmalek Assaâdi
FST Tanger//M112/ Année 10-11

Série de TD n°3

Exercice1

P h=x

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{-\frac{1}{x}}} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. f est-elle continue en 0 ?
2. Calculer les limites suivantes:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x}, \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x}.$$

3. f est-elle dérivable sur $\boldsymbol{R}$?

Exercice2

Soit f définie et continue sur $[0,+\infty[$, dérivable sur $]0,+\infty[$ et vérifiant $f(0)=0$.
Montrer que si $f'(x)$ est croissante, il en est de même pour $\dfrac{f(x)}{x}$.

Exercice3

1. Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$. Appliquer le théorème de Rolle à la fonction

$$F(x) = (f(b)-f(a))\,g(x) - (g(b)-g(a))\,f(x),$$

pour déduire qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$(f(b)-f(a))\,g'(c) = (g(b)-g(a))\,f'(c).$$

2. En déduire la régle suivante (régle de l'Hôpital):

$$\text{si } \begin{cases} f(a) = g(a) \\ \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l \end{cases} \text{ alors } \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

3. Calculer

$$a)\lim_{x\to 0} \frac{x-\tan x}{x^3}, \qquad b)\lim_{x\to 0} \frac{x+\frac{x^3}{3}-\tan x}{x^5},$$
$$c)\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}.$$

ETUSUP .com

Exercice4

En utilisant la formule des accroissements finis, montrer que

$$\sin x \leq x,\ \forall x \geq 0, \qquad \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x,\ \forall x \geq 0,$$

$$1 + x < e^x < \frac{1}{1+x},\ \forall x \in]0, 1[.$$

Exercice5

1. Montrer que l'équation $e^x = 3 + x$ admet une solution a qui soit positive (localiser cette solution entre deux entiers).
2. Etudier la suite $(u_n)_n$ définie par:

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = \ln(u_n + 3),\ \forall n \in \boldsymbol{N} \end{cases}$$

et montrer que qu'elle converge vers a.

Exercice6

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2\sqrt{2}}{2\sqrt{x^4 - 2x^2 + 2}}$, déterminer
   - le domaine de définition de f,
   - la parité de f,
   - la dérivée f' et son domaine de définition,
   - le tableau de variations de f.
2. Soit g la fonction définie par $g(x) = \arcsin(f(x))$, déterminer
   - le domaine de définition de g,
   - la parité de g,
   - la dérivée g' et son domaine de définition,
3. Montrer que g admet aux points $x = -\sqrt{2}$ et $x = \sqrt{2}$ une dérivée à droite et une dérivée à gauche que l'on calculera.
4. Tracer le graphe de g.

Exercice7

Etudier la continuité, la dérivabilité et les variations de la fonction

$$f(x) = \arccos(\sin x) + \arcsin(\cos x).$$

Tracer le graphe de f.

ETUSUP .com

Exercice 1 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{-1/x}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

1/ $\lim\limits_{0^+} f = \dfrac{0}{1+0} = 0 = f(0)$; $\lim\limits_{0^+} e^{-\frac{1}{x}} = \lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$ $(X = -\frac{1}{x})$

$\lim\limits_{0^-} f = \dfrac{0}{+\infty} = 0 = f(0)$; $\lim\limits_{0^-} e^{-\frac{1}{x}} = \lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$ $(X = -\frac{1}{x})$

f est continue à droite et à gauche en 0, donc elle est continue en 0

2/ $\lim\limits_{0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{0^+} \dfrac{1}{1+e^{-1/x}} = 1$; $\lim\limits_{0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{0^-} \dfrac{1}{1+e^{-1/x}} = \dfrac{1}{+\infty} = 0$

On a $f'_d(0) \neq f'_g(0)$ donc f n'est pas dérivable en 0

et par suite non dérivable sur $\mathbb{R}$.

Remarque : $x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

Exercice 2 posons $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ alors $g'(x) = \dfrac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$

On a f continue sur $[0,x]$ et dérivable sur $]0,x[$; $\forall x > 0$

donc d'après le théorème des accroissements finis ; $\exists c \in]0,x[$ tel que

$f(x) - f(0) = (x-0) f'(c)$ càd $f(x) = x f'(c)$

On a $0 < c < x$ et f' est croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc $f'(c) \leq f'(x)$

d'où $x f'(c) \leq x f'(x)$ càd $f(x) \leq x f'(x)$

et ainsi $x f'(x) - f(x) \geq 0 \Rightarrow g'(x) \geq 0 \Rightarrow g$ croissante.

Exercice 3 $F(x) = (f(b)-f(a))g(x) - (g(b)-g(a))f(x)$.

$F'(x) = (f(b)-f(a))g'(x) - (g(b)-g(a))f'(x)$

1/ f et g sont continues sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$ donc de même F

$F(a) = (f(b)-f(a))g(a) - (g(b)-g(a))f(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a)$

$F(b) = (f(b)-f(a))g(b) - (g(b)-g(a))f(b) = g(a)f(b) - f(a)g(b)$

On a $F(a) = F(b)$ donc d'après Rolle $\exists c \in]a,b[\,/\, F'(c) = 0$

càd $(f(b)-f(a))g'(c) - (g(b)-g(a))f'(c) = 0$

d'où $(f(b)-f(a))g'(c) = (g(b)-g(a))f'(c)$

ETUSUP .com

2/ Considérons l'intervalle $[a,x]$ (et $[x,a]$) ; D'après la question 1

$\exists\, c_x \in]a,x[$ (et $c_x' \in]x,a[$) tel que :

$(f(x)-f(a))\, g'(c_x) = (g(x)-g(a))\, f'(c_x)$ {

$f(a)=f(b)=0 \Rightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$. qd $x \to a$; $c_x \to a$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \ell$

d'où $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell$

3/ a/ $\lim\limits_{0} \dfrac{x-\tan x}{x^3} = \lim\limits_{0} \dfrac{1-(1+\tan^2 x)}{3x^2} = \lim\limits_{0} -\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^2 = -\dfrac{1}{3}$

b/ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x + x^3/3 - \tan x}{x^5} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+x^2-1-\tan^2 x}{5x^4} = \lim\limits_{0} \dfrac{2x - 2\tan x\,(1+\tan^2 x)}{20\,x^3}$

$= \lim\limits_{0} \dfrac{2x - 2\tan x - 2\tan^3 x}{20\,x^3} = \lim\limits_{0} \dfrac{2-2-2\tan^2 x - 6\tan^2 x\,(1+\tan^2 x)}{60\,x^2} = \lim\limits_{0} \dfrac{\tan^2 x}{x^2}\left(-8-6\tan^2 x\right) = -\dfrac{2}{15}$

c/ $\lim\limits_{0} \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2} = \lim\limits_{0} \dfrac{1/1+x - 1}{2x} = \lim\limits_{0} \dfrac{-x}{2x(1+x)} = -1/2$

<u>Exercice 4</u> a/ $\forall x \geq 0$: $\sin x \leq x$

Posons $f(x) = \sin x$, f est cont sur $[0,x]$ et dérivable sur $]0,x[$

TAF : $\exists\, c \in]0,x[$ / $f(x)-f(0) = (x-0)\, f'(c)$ càd $\sin x = x\cos c$

or $\forall x \in [0,+\infty[$: $-1 \leq \cos c \leq 1 \Rightarrow x\cos c \leq x \quad \forall x \geq 0$

d'où $\sin x \leq x \quad \forall x \geq 0$

b/ $\forall x \geq 0$: $\dfrac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x \quad \forall x \geq 0$

la fonction $f(x) = \ln(1+x)$ est cont sur $[0,x]$, dérivable sur $]0,x[$

donc $\exists\, c \in]0,x[$ tel que $f(x)-f(0) = (x-0)\, f'(c)$ càd $\ln(1+x) = \dfrac{x}{1+c}$

On a $0 < c < x \Rightarrow 1 \leq c+1 \leq 1+x \Rightarrow \dfrac{1}{1+x} \leq \dfrac{1}{c+1} \leq 1 \Rightarrow$

$\dfrac{x}{1+x} \leq \dfrac{x}{c+1} \leq x \Rightarrow \dfrac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$

c/ $\forall x \in]0,1[$: $x \leq e^x \leq \dfrac{1}{1+x}$

la fonction $f(x) = e^x$ est cont sur $[0,x]$, dérivable sur $]0,x[$

donc $\exists\, c \in]0,x[$ tel que $f(x)-f(0) = (x-0)\, f'(c)$

càd $e^x - 1 = x e^c$

On a $0 < c < x \Rightarrow 1 < e^c < e^x \Rightarrow x < x e^c < x e^x$

d'où $x < e^x - 1 < x e^x$, de plus $e^x - 1 < x e^x \Rightarrow e^x(1-x) < 1 \Rightarrow e^x < \dfrac{1}{1-x}$

d'où $x+1 \leq e^x \leq \dfrac{1}{1-x}$ //

Exercice 5

1/ On pose $g(x) = e^x - 3 - x$

- g est continue sur $[0,+\infty[$, dérivable sur $[0,+\infty[$ et $\forall x \in [0,+\infty[: g'(x) = e^x - 1 > 0$

$\Rightarrow g$ est strictement croissante sur $[0,+\infty[$

- $g(0) = -2 < 0$ et $\lim\limits_{+\infty} g(x) = +\infty > 0$ donc $\exists ! \, a \in [0,+\infty[$ tel que $g(a) = 0$ càd a solution de l'equation $g(x) = 0$ et de l'equation $e^x = 3 + x$

∴ On a : $g(0) = -2 < 0$ et $g(1) = e - 4 < 0$ et $g(2) = e^2 - 5 > 0 \Rightarrow a \in [1,2]$

2/ Posons $f(x) = \ln(x+3)$ définie sur $[1,2]$ et $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$ $n \geq 0$

- f est cont, dérivable sur $[1,2]$ et $\forall x \in [1,2] : f'(x) = \frac{1}{x+3} > 0$

donc f est strictement croissante sur $[1,2]$ d'où $f([1,2]) = [\ln 4, \ln 5] \subset [1,2]$

- Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} : 1 \leq U_n \leq 2$

pour $n = 0$: $1 \leq U_0 \leq 2$ est vraie

Supposons : $1 \leq U_n \leq 2$ et m.que $1 \leq U_{n+1} \leq 2$

Comme f est croissante alors $1 \leq U_n \leq 2 \Rightarrow f(1) \leq f(U_n) \leq f(2)$

$\Rightarrow \ln 4 \leq U_{n+1} \leq \ln 5 \Rightarrow 1 \leq U_{n+1} \leq 2$ $(\ln 4 \geq 1, \ln 5 \leq 2)$

- Montrons par récurrence que (U_n) est croissante : $\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} \geq U_n$

. $U_0 = 1 < U_1 = \ln 4$

. Supposons $U_n < U_{n+1}$ alors $f(U_n) < f(U_{n+1})$ càd $U_{n+1} < U_{n+2}$

donc la proposition est vraie pour $n+1$

- (U_n) est croissante et majorée donc convergente vers ℓ avec $1 \leq \ell \leq 2$ et $\ell = f(\ell)$ càd $\ell = \ln(\ell+3) \Rightarrow e^\ell = \ell + 3 \Rightarrow \ell = a$

Exercice 7 $f(x) = \arccos(\sin x) + \arcsin(\cos x)$

- sin et cos sont définies sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} : -1 \leq \sin x \leq 1$ et $-1 \leq \cos x \leq 1$

donc $D_f = \mathbb{R}$

- f est périodique de période $T = 2\pi$. De plus f est paire donc il suffit d'étudier f sur $[0,\pi]$

- Si $0 \leq x \leq \pi/2$ alors $0 \leq \frac{\pi}{2} - x \leq \frac{\pi}{2}$ d'où $f(x) = \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) + \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x))$

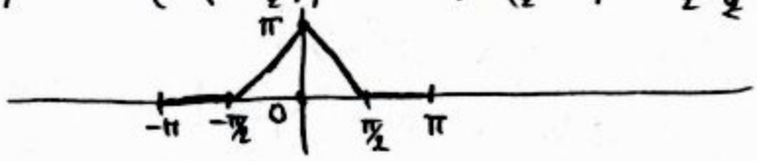
$= \frac{\pi}{2} - x + \frac{\pi}{2} - x = \pi - 2x$

ETUSUP .com

• si $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ alors $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - x \leq 0$ et $0 \leq x - \frac{\pi}{2} \leq \pi/2$ d'où

$$f(x) = \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) + \operatorname{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) + \operatorname{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = x - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - x = 0$$

$$\begin{cases} f(x) = \pi - 2x & x \in [0, \pi/2] \\ f(x) = 0 & x \in [\pi/2, \pi] \end{cases}$$



<u>Exercice 6</u> 1/ $f(x) = \dfrac{x^2\sqrt{2}}{2\sqrt{x^4 - 2x^2 + 2}}$ $\qquad \forall x \in \mathbb{R} : x^4 - 2x^2 + 2 > 0$

• le discriminant du trinôme $X^2 - 2X + 2$: $\Delta = b^2 - 4ac = -4 < 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$

• $f(-x) = f(x)$; f est paire (Domaine d'étude $D_E = [0, +\infty[$

• $D_{f'} = \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \sqrt{2} \cdot \dfrac{x(2 - x^2)}{(x^4 - 2x^2 + 2)^{3/2}}$

• f' a le signe de $x(2 - x^2)$:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

2/ $g(x) = \arcsin(f(x))$

• D'après le tableau de variation de f : $\forall x \in \mathbb{R}$: $0 \leq f(x) \leq 1$ d'où $D_g = \mathbb{R}$

• f paire et arcsin impaire $\Rightarrow g$ paire $\Rightarrow D_g = [0, +\infty[$ (domaine d'étude de g)

• f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $D = \mathbb{R} - \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$ et $\forall x \in D$: $f(x) \neq 1$

donc g est dérivable sur D ; $D_{g'} = \mathbb{R} - \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$

et $\forall x \in D$: $g'(x) = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1 - (f(x))^2}}$

g' a le même signe que f' :

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
g'		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	
g	$\pi/4$	$\nearrow$	$\pi/2$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\pi/2$	$\searrow$	$\pi/4$

3/ Dérivabilité en $\sqrt{2}$ et en $-\sqrt{2}$

$$\lim_{x \to \sqrt{2}} \frac{g(x) - g(\sqrt{2})}{x - \sqrt{2}} \overset{\text{Hopital}}{=} \lim_{x \to \sqrt{2}} \frac{g'(x)}{1} = \lim_{x \to \sqrt{2}} \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - f^2(x)}} = \lim_{x \to \sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}\,x(2 - x^2)}{(x^4 - 2x^2 + 2)^{3/2}} \cdot \frac{\sqrt{2}(x^4 - 2x^2 + 2)^{1/2}}{|x^2 - 2|}$$

$$= \lim_{\sqrt{2}} \frac{2(2 - x^2)}{|x^2 - 2|} \cdot \frac{x}{(x^4 - 2x^2 + 2)}$$

$\nearrow -\sqrt{2}$ si $x \to \sqrt{2}^+$

$\searrow \sqrt{2}$ si $x \to \sqrt{2}^-$

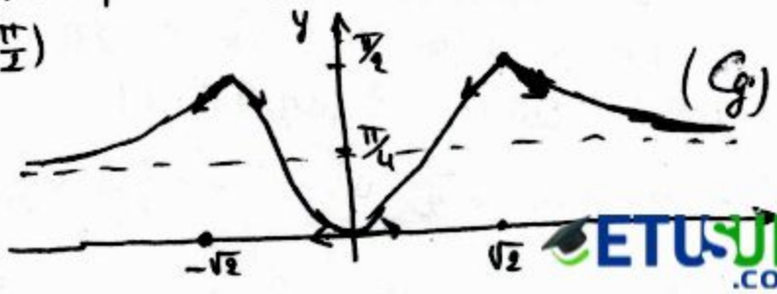
x		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	
$x^2 - 2$	$+$	0	$-$	0	$+$

De même $g'_d(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$ et $g'_g(-\sqrt{2}) = \sqrt{2}$

g n'est pas dérivable en $\sqrt{2}$ (en $-\sqrt{2}$) et g admet des demi-tangentes à droite et à gauche en $\sqrt{2}$ (en $-\sqrt{2}$) d'équations respectives : $y = -\sqrt{2}(x - \sqrt{2}) + \frac{\pi}{2}$ et $y = \sqrt{2}(x - \sqrt{2}) + \frac{\pi}{2}$

($y = -\sqrt{2}(x - \sqrt{2}) + \frac{\pi}{2}$ et $y = \sqrt{2}(x - \sqrt{2}) + \frac{\pi}{2}$)

4/ Graphe de g



ETUSUP .com

ETUSUP.com

Programmation
Cours
Informatique
Optique
Chimie
Algébre
Corrigés
Mathématiques
Travaux Pratiques
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Diapo
Exercices
Livres
Contrôles Continus
Langues
MTU
Mécanique
Thermodynamique
Divers
Multimedia
Economie
Travaux Dirigés
Droit
Chimie Organique

et encore plus..